# RAPPORT D'ÉPREUVE

## 1 Remarques globales

### 1.1 Forme

Nous rappelons une nouvelle fois qu'une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire. Elle permet de comprendre la problématique de chaque exercice et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.

Dans la plupart des copies, les résultats sont encadrés. Mais beaucoup de copies sont très mal présentées, avec énormément de ratures, ce qui ne rend pas la correction agréable. Aérer sa copie la rend bien plus lisible. Même avec une écriture « normale » une copie trop tassée est difficile à lire. D'ailleurs, certaines sont même peu lisibles en termes d'écriture. Rappelons qu'une question illisible ne sera pas lue donc ne rapportera pas de points et met le correcteur dans une position peu favorable pour les questions suivantes. Nous ajouterons aussi qu'il faut éviter les abréviations en particulier si elles sont obscures (SATP ou IFCP ?)

Un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Il n'est pas dérangeant de traiter des parties dans un ordre différent mais revenir temporairement sur diverses questions, à de nombreuses reprises, est pénible et ne permet pas une bonne saisie du raisonnement du candidat pour le correcteur.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 5,6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

### 1.2 Fond

Tous les candidats ont traité les 3 exercices. Les questions informatiques sont traitées, et plutôt bien, par la majorité des candidats.

Les récurrences demandées ne sont pas « évidentes ». Il faut les rédiger. Un laconique « Par itérations successives » n'est pas une preuve. De même, lorsque l'énoncé demande de démontrer un point de cours, se contenter de dire que «c'est vrai d'après le cours»n'est pas suffisant.

Les produits de matrices s'écrivent en ligne. Les candidats peuvent les poser sous la forme $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}$ au brouillon, mais une telle écriture n'a pas sa place dans une copie.

## 2 Remarques question par question

## Exercice 1

1. (a) Cette question est en général bien traitée. Mais attention « c'est une série de Riemann » n'est pas un argument suffisant, il convient de bien expliciter le critère, ici que $2>1$ même si cela parait évident.



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(b) La question n'est pas toujours bien traitée. Les candidats distinguent $n$ pair et $n$ impair et peinent à conclure. D'autres écrivent « la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ convergent absolument », ce qui n'est pas incorrect, mais montre une maîtrise incomplète de la notion d'absolue convergence. Rappelons que le critère des séries alternées est hors programme, il ne doit donc pas être utilisé ici.

(c) Cette question est en général bien traitée. La positivité est en général bien citée. Mais ensuite, l'équivalence est trop souvent incorrecte avec des erreurs classiques lors de la préparation mais qui ne devraient plus apparaître au concours si les candidats ont bien pris le temps de reprendre leur devoirs avec un esprit critique: $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$ ou $\frac{1}{n^2}$.
Certains candidats concluent à l'aide du changement d'indice illicite $k = 2n+1$.

2. L'égalité $A - B = 2C$ est souvent bien obtenue. La suivante est soit oubliée soit non réussie. A nouveau les changements d'indice suivants ne sont pas licites : $j = (n+1)/2$ ou bien $j = 2n+1$.

3. (a) Cette question est en général bien réussie.
Pour certains candidats les formules de trigonométrie ne sont pas toujours bien connues : (par exemple $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ ou $\cos(\alpha)\cos(\beta)$), et d'autres se contentent de répondre : « vrai d'après le cours. » !

(b) L'hérédité est souvent mieux réussie que l'initialisation. Nous avons vu, beaucoup d'erreurs et de maladresses dans les calculs. Certains candidats s'arrangent parfois miraculeusement pour obtenir le résultat annoncé. Ceci n'incite pas à l'indulgence dans l'évaluation des questions suivantes.

4. (a) Les candidats connaissent en général la propriété à utiliser mais utilisent le même majorant pour $f$ et $f'$.
Quelques erreurs sont à noter cependant: «la fonction $f$ est croissante (hypothèse non faite dans l'énoncé): $m = f(a), M = f(b)$» ou «$m \leqslant f \leqslant M \Longrightarrow |f| \leqslant M$»

(b) Dans cette question, le théorème d'encadrement permet de conclure efficacement. Cependant les opérations sur les inégalités sont en général très maladroites et parfois fausses, en particulier de nombreuses inégalités sans valeurs absolues ou seulement avec une partie des valeurs absolues.
Enfin, certains candidats concluent par encadrement alors qu'ils n'ont donné qu'une majoration: une minoration est indispensable.

(c) Le théorème d'intégration par parties est clairement bien connu et compris.
La limite de $\frac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda}$ et $\frac{f(b)\sin(\lambda b)}{\lambda}$ est souvent donnée directement sans justification. Les phrases du type « $f(a)\sin(\lambda a)$ est un réel (ou même ne dépend pas de $\lambda$) donc $\frac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda}$ tend vers 0 » sont assez courantes.

5. (a) Cette question est en général bien traitée, même si les candidats oublient souvent qu'un quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$.
Les formules passe-partout du type «La fonction est constituée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$»ou «par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$»sont trop imprécises ici pour être acceptées.

(b) La définition d'un prolongement par continuité est assez bien maîtrisée dans l'ensemble, mais certains candidats pensent que seul 0 peut être la valeur de la limite, d'autres, qui connaissent bien $\sin(t) \sim t$, concluent par $\frac{t}{\sin(t/2)} \to \frac{1}{2}$...



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(c) Cette question est peu traitée.
Le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est peu connu des candidats. En général, les candidats cherchent une limite de $\varphi'$ en 0 et pensent que l'existence de cette limite permettra de conclure.

(d) Cette question est souvent mal rédigée. Le fait que $\pi - t \in [0, \pi]$ est insuffisant pour conclure, et bien sûr, il n'est pas attendu de reprendre intégralement le raisonnement précédent.

6. (a) Si la résolution de cette question est très souvent correcte, cependant cette résolution est trop souvent très maladroite.
Beaucoup distribuent $\cos(kt)$ et font donc un double calcul intégral. D'autres séparent dès le début le cas pair et le cas impair.
Des candidats traînent maladroitement jusqu'à la fin des calculs «$\sin(k\pi)$» et ne semblent pas très à l'aise avec les valeurs numériques de $\cos(2k\pi)$ et $\cos(2k+1)\pi)$.

(b) Cette question est bien traitée quand elle est abordée.

7. (a) Cette question est très peu traitée.
Par contre les rares fois où elle a été abordée, elle est très bien réalisée.

(b) En général cette question est bien faite, mais sur certaines copies, des erreurs dans ce calcul apparaissent.

## Exercice 2

### Partie 1

1. (a) Certains candidats (en s'aidant des questions suivantes) constatent que $M^3 = 4M^2+12M+28I$, ce qui n'était évidemment pas la méthode attendue dans cette question. Une telle méthode demanderait un calcul explicite de tous les coefficients de toutes les matrices.Beaucoup de candidats affirment que les 10 matrices sont colinéaires à $I$ ou à $M$ puisque, par exemple «$M^k = M^{k-1} \times M$ donc les matrices sont proportionnelles les unes les autres.»
Malgré tout l'argument lié à la dimension de $M_3$ semble connu de nombreux candidats.

(b) Question en général bien traitée. Certains oublient de justifier que le polynôme est non nul ou que les coefficients de la combinaison linéaire ne sont pas tous nuls.

2. (a) L'utilisation de Python pour le calcul matriciel est défaillante.La commande `dot` de numpy n'est souvent pas connue et l'utilisation de `matrix_power` est très rarement rencontrée. Le test d'égalité est presque toujours faux : «`A==0`»renvoie un tableau !

(b) Cette question est dans l'ensemble abordée et bien traitée, mais certains candidats se lancent dans le calcul de $M^{-1}$ avec la méthode de Gauss, ce qui leur fait perdre beaucoup de temps et ne répond pas à la question.

3. (a) Le résultat de cours : « les valeurs propres sont incluses dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur » est bien connu dans l'ensemble. Mais ici, on demandait au candidat de démontrer le résultat. Les réponses correctes à cette question sont donc rarissimes (mais bien présentées lorsque la preuve du cours est proposée !).

(b) Cette question est en général partiellement traitée. Beaucoup de candidats s'arrêtent au calcul du discriminant, trop de valeurs $x_1$ et $x_2$ erronées, ou mal voir pas simplifiées.
Lorsque les racines ont été trouvées, le tableau de variation est en général juste, mais les candidats ont eu du mal dans la rédaction ensuite pour justifier l'unicité de la racine de $\varphi$.Il



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

manque souvent des hypothèses pour appliquer le théorème de la bijection. Enfin, la position de $x_2$ par rapport à 4 n'est souvent pas clairement précisée.

(c) Certains candidats affirment trop rapidement que si $M$ était diagonalisable avec une seule valeur propre, alors $M$ serait proportionnelle à $I_3$, une étape intermédiaire serait souhaitable. Nous avons rencontré quelques preuves par l'absurde correctes avec la trace : «$\text{tr}(M) = 3\lambda = 4$...>

## Partie 2

Si $M$ est une matrice, il n'existe pas d'objet « $\sqrt{M}$ » ni « $M^{1/2}$ ».

4. cette question est en général bien traitée.
5. Cette question est souvent abordée, mais moyennement bien traitée. Pour certains les valeurs propres de toute matrice symétrique sont strictement positives. Pour d'autres, la non nullité de $X$ ou de $\lambda$ est souvent oubliée.
6. Cette question est en général bien traitée, mais avec une certaine maladresse.
7. (a) Beaucoup de 1 et de 2 mais aussi des réponses assez fantaisistes 6, 9,... La bonne réponse n'est malheureusement pas la plus fréquente.
   (b) L'implication suivante souvent rencontrée est fausse: «$\Delta$ est diagonale donc inversible».
8. La majorité des candidats posent la bonne matrice $R$ et vérifient que $R^2 = S$, mais trop peu pensent à vérifier que $R$ est bien symétrique.
9. Cette question est souvent abordée même quand la question précédente n'est pas traitée ou mal traitée.
   L'inversibilité n'est pas toujours prouvée par contre l'expression de $R^{-1}$ est très souvent correcte.
   La formule donnant la matrice inverse d'un produit de 2 matrices inversibles plutôt bien maîtrisée.
10. Cette question est peu traitée.
    Il est regrettable qu'au moins l'objectif «$U^tU = I_n$»n'apparaisse peu;

## Partie 3

11. Cette question est en général bien traitée.
12. La première partie de la question est en général admise, les candidats pensent à prouver la suivante plus facile.
13. Quand elle est abordée, cette question est bien traitée.
14. (a) Quand elle est abordée, cette question est bien traitée. Le produit par bloc n'est pas au programme: Ainsi une telle écriture ne peut pas être acceptée :$(C_1|C_2|C_3)E_1 = C_1$.
    (b) Cette question est peu traitée.
    (c) Cette question est très peu traitée, mais bien traitée quand elle l'est.
    (d) Cette question est rarement traitée, mais souvent bien traitée quand elle l'est.
15. Cette question est mal traitée quand elle est abordée ($N^2$ est diagonale donc $N$ l'est !)
16. La première partie de la question est en général admise.
17. cette question est peu traitée, mais quand elle est abordée, elle est rapide et correcte.



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

# Problème

## Partie 1

1. (a) Cette question est en général bien traitée.
   Mais certains équivalents farfelus sont à noter : $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} (y-1)t^{x-1}$ ou $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x+y-2}$ ou encore $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} 0$...

   (b) En général le retour à une intégrale de Riemann est bien fait. Mais la continuité et/ou la positivité des fonctions comparées est oubliée très très souvent.
   Enfin, quelle que soit la valeur de $x$ non entier la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ n'est pas définie en 0 (et donc pas continue en 0 non plus)
   Certains déterminent la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}dt$ sans se préoccuper de la convergence et concluent en affirmant que $\dfrac{1}{x2^x}$ n'est définie que pour $x > 0$... Cette rédaction n'est pas seulement maladroite, elle est fausse et absolument inadaptée à la question posée qui ne portait que sur la convergence de l'intégrale.

   (c) On ne peut pas écrire l'égalité des intégrales par changement de variable tant qu'on n'a pas montré la convergence.

   (d) Le raisonnement est très souvent bâclé.
   La relation de Chasles est invoquée (quasi-systématiquement) au lieu de la définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert.

2. Question en général bien traitée. Quelques fois, un argument de symétrie est souvent invoquée, mais c'est la but de cette question que de prouver la symétrie en question...

3. Très peu de candidats constatent que 0 est une borne impropre. Le calcul de primitive est en général correct.

4. (a) Cette question est en général bien traitée.

   (b) Très peu de candidats ont réalisé l'intégration par parties sur un segment.
   Elle est faite comme s'il s'agissait d'une intégrale définie sur un segment alors que c'est la huitième question portant sur la même intégrale doublement généralisée.
   Les fonctions en jeu dans l'intégration par parties ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, il faut donc se placer sur un segment puis passer à la limite.

   (c) Cette question calculatoire est, en général, bien traitée mais pas toujours de manière efficace.

5. Cette récurrence a été plutôt mal menée. Les quantificateurs sont trop souvent omis. De plus il est important ici de bien préciser l'hypothèse de récurrence et sur quel entier la récurrence est faite.

## Partie 2

6. (a) Le sujet demandait de démontrer le résultat du cours et pas seulement de l'énoncer.

   (b) Cette question n'est pas, en général, menée jusqu'au bout.
   Les hypothèses du changement de variable sont rarement toutes bien citées et beaucoup d'erreurs dans ce changement de variable.
   L'argument de parité ne pouvait être utilisé car il est hors programme.
   Nous avons apprécié que quand cela a été cité, l'expression et la valeur de l'intégrale de la densité de la loi normale centrée réduite était correcte.



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

7. (a) Beaucoup de candidats se sont trompés en pensant reconnaître directement une densité de loi $\gamma$, ce qui n'était pas le cas ici à cause de la présence du $b$ dans l'exponentielle. On pouvait s'y ramener à l'aide d'un changement de variable, mais encore fallait-il le faire !

   Chez les candidats qui utilisent les théorèmes de comparaison pour la convergence, souvent, seule la convergence en $+\infty$ est faite. L'intégrale était aussi impropre en 0.

   (b) La définition d'une densité de probabilité est bien connue.

   Mais la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\mathrm{d}\ t$ sont peu prouvées.

8. (a) Cette question est assez souvent bien traitée.
   Mais, la variance de la loi $\gamma$ n'est pas explicitement au programme. Il fallait démontrer le résultat.

   (b) Dans cette question, l'existence de la variance de la variable aléatoire est attendue, donner uniquement sa valeur était insuffisant.

9. (a) Cette question est un peu plus rarement abordée.
   Il est important de préciser que $b > 0$ quelque soit la méthode utilisée : par la fonction de répartition ou par l'expression de la densité d'une transformation affine.

   (b) Cette question est peu abordée. Certains ne reconnaissent pas la loi, et mènent des calculs inutiles pour trouver des valeurs justes néanmoins, mais quelle perte de temps !

10. (a) Certains candidats pensent au produit de convolution, mais peu savent le faire correctement. Parmi eux, certains croient que les densités sont bornées pour justifier la convergence du produit de convolution.

    (b) Cette question est très peu traitée.

    (c) De manière assez choquante plusieurs candidats confondent multiplication et addition. Rappelons donc que $\sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi} = \pi$ et non $2\sqrt{\pi}$.

    Une cohérence avec la question 6.(b) aurait été bienvenue. Si la valeur de $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ semble connue d'un certain nombre de candidats, il serait souhaitable qu'ils s'interrogent sur la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ obtenue précédemment si elle n'est pas en accord, et signale une erreur plutôt que d'espérer que rien en sera vu.

## Partie 3

11. (a) Cette question est peu traitée, mais quand elle est abordée, elle est plutôt bien réalisée.

    (b) En général, cette question est bien faits.
    Certains cependant utilisent deux fois `rd.random()` pour les deux lettres $U$ présentes, cependant $U$ les deux fois désigne la même variable et donc prend la même valeur.

    (c) Cette question est très peu traitée, mais quand elle est abordée elle est plutôt bien réalisée, même si, l'indépendance des $(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1})_{k\geqslant 1}$ n'est pas toujours justifiée par le lemme de coalitions.

    (d) En général, cette question est bien faite.

    (e) Il est attendu une phrase ayant du sens. Dire que « la figure illustre $\pi$ » ou que « la figure illustre $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ » n'a pas de sens. Le correcteur n'interprète pas les propos du candidat.

12. (a) Cette question est très peu traitée, mais quand elle est abordée, elle est plutôt bien réalisée.



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(b) Cette question est très peu traitée, mais quand elle est abordée, elle est plutôt bien réalisée.

(c) Peu de candidats reconnaissent la loi exponentielle. Et encore moins réalisent qu'une liste de longueur $n$ est renvoyée.

(d) Cette question est très très peu abordée.



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.