RAPPORT D'ÉPREUVE

1 Remarques globales

1.1 Forme

Le sujet présente trois exercices permettant de couvrir le programme. La longueur des deux premiers exercices permettait aux candidats de traiter également le troisième. L'informatique était présente dans le sujet (langage Python et SQL), et s'articulait avec les mathématiques.

Dans chaque exercice on pouvait rencontrer des questions de difficultés variées avec notamment des questions de connaissance du cours assez simples permettant de distinguer parmi les candidats faibles, les élèves sérieux des autres.

On pourra de nouveau déplorer un trop grand nombre de copies dont le soin et la lisibilité n'étaient pas au rendez-vous. Pour rappel, une réponse illisible est par défaut considérée comme erronée. De plus un bon nombre de copies avaient des questions mal (ou pas numérotées), cela rend la correction désagréable. Outre le fait de bien numéroter les questions, il est aussi recommandé de passer une ligne ou de tracer un trait entre les questions traitées.

On rappelle une nouvelle fois que les abréviations sont à proscrire, qu'elles soient assez limpides ou plus obscures. Elles n'ont pas leur place dans une copie de concours.

Il est inutile de recopier ou de paraphraser la question avant d'y répondre. Les candidats perdent du temps, et quelque fois, il est gênant de se rendre compte que rien ne permet de distinguer la partie « je paraphrase l'énoncé » de la partie « je construis mon raisonnement ».

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

1.2 Fond

Un nombre non négligeable de candidats sont d'un niveau extrêmement faible, avec de grosses lacunes calculatoires (confondre multiplier et diviser...).

L'emploi du vocabulaire et des notations mathématiques manque souvent de rigueur.

Pour les copies très fournies, il ne s'agit pas seulement de traiter beaucoup de questions, mais il faut surtout BIEN les traiter : bâcler les raisonnements est contre-productif.

2 Remarques question par question

Exercice 1

1. À peu près la moitié des candidats a répondu juste, mais souvent avec des réponses comme «ensemble des matrices nulles ou ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ».

   Beaucoup d'étudiants ne savent pas utiliser correctement les notations et confondent l'ensemble E_C et les éléments qui le composent, par exemple, beaucoup écrivent à tort $E_0 = 0M + M0$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

2. Question très mal traitée.
   - ⋆ Oubli de l'inclusion la plupart du temps.
   - ⋆ Des étudiants montrent que le vecteur nul appartient à l'ensemble E_C en utilisant la question 1. !
   - ⋆ La stabilité par combinaison linéaire n'est pas du tout comprise par la plupart des candidats. Il y a ceux qui confondent cette démonstration avec la démonstration de la linéarité d'une application. Et ceux qui confondent les matrices sur lesquelles il faut vérifier cette stabilité. (La combinaison linéaire est sur M et non sur C).
3. Le caractère symétrique de A est souvent vu.
4. (a) Cette question est très bien traitée.
   (b) Peu d'étudiants pensent à utiliser un polynôme annulateur.
   Le lien entre λ valeur propre et la non-inversibilité de $A-\lambda I$ est très souvent à juste titre cité. Malheureusement les calculs pour la détermination des pivots ne sont pas toujours menés avec succès.
   (c) La question a été plutôt bien traitée.
   Cependant, beaucoup d'étudiants oublient de confirmer que $-3, 0, 3$ sont effectivement valeurs propres de A. L'équivalence suivante, souvent rencontrée, «(λ est valeur propre de A) est équivalent à («)λ est racine du polynôme annulateur trouvé à la question précédente)», est incorrecte seule une implication est vraie. À ce stade de l'exercice on a simplement $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-3; 0, 3\}$.
   Enfin, la consigne «dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1» n'est pas toujours respectée.
5. Souvent correcte lorsque 4.(c) est juste.
   Même si quelque fois, alors que P était juste, certains candidats veulent absolument trouver $P^2 = I$.
6. (a) Cette question et bien traitée en général.
   Mais l'équivalence n'est pas toujours bien établie : Certains candidats ne démontrent qu'un seul sens et parfois, ou d'autres commencent un raisonnement par équivalence et un « donc » malvenu brise l'enchaînement des équivalences.
   (b) Plusieurs types d'erreurs dans cette question.
   - ⋆ La preuve du fait que la famille est libre est souvent oubliée et parfois c'est l'oubli de la dimension.
   - ⋆ « libre car formé de 3 vecteurs non colinéaires ».
   - ⋆ Les vecteurs de la base attendus sont des éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices carrées 3×3 et non des éléments de $\mathbb{R}^3$ ou des matrices colonnes.
7. (a) Question plutôt bien traitée dans la moitié des cas.
   (b) Cette question est très peu traitée, mais quand elle a été traitée, elle est bien faite.
8. Dans cette question, l'égalité suivante est incorrecte « $(A+M)^2 = A^2 + \mathbf{2AM} + M^2$ » car A et M ne commutent pzs forcément...
9. Cette question a été très peu traitée. Quand elle l'a été, très peu d'étudiants ont fait le lien entre E_A et le noyau de φ.
   En général, le théorème du rang est très bien écrit, mais la dimension de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est souvent fausse

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

Exercice 2

1. (a) La convergence d'un intégrale est un attendu principal du programme. Certains candidats soignent bien la démonstration de cette convergence en pensant bien par rappeler la continuité de la fonction à intégrer, par préciser la positivité de cette même fonction puis enfin par utiliser un critère de comparaison.
   Cependant une grande majorité de candidats ne parlent pas de la continuité de la fonction à intégrer, ni la continuité, ou encore se trompent dans la comparaison, affirmant ainsi que $t^n \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.
   Il est important ici de soigner le passage de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}\ t$ à $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}\ t$ en utilisant la relation de Chasles et donc en précisant que la fonction intégrer est continue sur le segment $[0,1]$.
   Certains candidats produisent encore cette erreur classique lors de la formation et de la préparation aux concours mais qui devrait être dépassée lors de l'écrit: cette erreur consiste à considérer que si $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} = 0$ alors l'intégrale converge.

   D'autres candidats pensent calculer I_n explicitement avec une intégration par parties ou une intégration directe. Dans cette question la valeur de l'intégrale n'est pas demandée, de telles méthodes ne sont donc pas à privilégier. Par ailleurs, l'intégration par parties demanderait de mener un raisonnement par récurrence, un peu long par rapport aux attendus de cette question. Rappelons qu'une primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives.

   Enfin, l'existence et la valeur du moment d'ordre n de la loi exponentielle de paramètre 1, n'étant pas un résultat au programme, ne pouvaient pas être utilisés ici pour répondre à cette question.

   (b) Un grand nombre de candidats ont reconnu la densité et l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, ce qui donnait par le cours immédiatement la réponse. Ils pouvaient ainsi répondre rapidement à cette question.
   Beaucoup de candidats savent qu'il faut être prudent avec le calcul de l'intégrale impropre en $+\infty$, notamment pour le calcul par intégration par parties. Ils introduisent une borne A, mais souvent bien maladroitement : on voit par exemple fréquemment $I_0 = \displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}\ t$ (idem pour $I_1 = \displaystyle\int_0^A t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}\ t$) et passent à la limite sans autre explication dans la suite de leurs égalités pour conclure aux valeurs.

2. Comme pour la première question de cet exercice, la continuité est rarement évoquée, et la positivité est parfois oubliée. Le critère de comparaison ici une majoration ou une négligeabilité est en général bien obtenu.

3. Cette question est bien traitée. Plusieurs candidats perdent du temps en détaillant nouveau le calcul de l'intégrale I_0 qu'ils ont obtenu à la question 1b.

4. La croissance de l'intégrale est très souvent citée et correctement utilisée. Cependant pour comparer les fonctions à intégrer, l'argument « t est positif » a souvent été oublié. Mais ici la positivité des fonctions à intégrer est inutile et cette vérification semble indiquer que les candidats répondent de manière automatique sans se référer aux énoncés du cours.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

L'inégalité obtenue sur les fonctions permet d'obtenir l'inégalité sur les intégrales impropres convergentes, mais la réciproque est fausse, il ne fallait donc pas raisonner par équivalence.

5. (a) Cette question est bien traitée par une majorité des candidats.
Néanmoins les erreurs suivantes ont été rencontrées :
   - ⋆ Pour $x = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$.
   - ⋆ Pour le cas $x > 0$, il y a eu des erreurs sur la primitive: le coefficient $\dfrac{1}{x}$ devient parfois x ou n'apparaît pas, la primitive et la dérivée sont trop souvent confondues.

   (b) Cette question est bien traitée. cependant certains confondent «croissance» et «linéarité» de l'intégrale.

   (c) Cette question est assez peu abordée et lorsqu'elle l'a été il y a à nouveau eu confusion de termes : « relation de Chasles » au lieu de « croissance de l'intégrale ».

   (d) Cette question est en général assez bâclée, elle demande une synthèse des question précédente, mais aussi une détermination précise des limites et une utilisation du théorème d'encadrement. Beaucoup ne font la limite que sur $[0, 1]$ ou que sur $[1, +\infty[$ et concluent directement pour $F(x)$.
   La limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est rarement justifiée correctement, souvent expédiée par un « par croissance comparée ». La formule du cours est $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$, il est donc indispensable de s'y rapporter pour conclure correctement.
   Enfin attention, a priori, la limite de l'intégrale n'est pas l'intégrale de la limite : plusieurs candidats recherchent la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}$.

6. (a) Cette question est assez bien traitée dans l'ensemble, même si trop nombreux sont les candidats qui ne reconnaissent pas l'identité remarquable $(a-b)(a+b)$.
   IL est souhaitable que les candidats distinguent la linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles.

   (b) Quand elle est abordée, cette question en général bien traitée.
   Pour les autres, la majoration a été peu ou mal faite. Les opérations sur les inégalités sont assez incertaines, en particulier, l'implication suivante est incorrecte: «$1 + xt \geqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{1+xt} \leqslant 1$».

7. (a) Cette question, un peu plus délicate et faisant appel à la définition de la négligeabilité, est très peu et très mal traitée. La relation de négligeabilité n'est pas maîtrisée, il ne suffisait pas de montrer que la limite de la différence tend vers 0.

   (b) Cette question demandait de connaître correctement la définition de la dérivabilité en un point et de savoir manipuler les opérations sur les développements limités.
   Les candidats oublient souvent de prendre la limite du taux d'accroissement, et quand ils y pensent, le petit ■ o ■ n'apparaît pas dans l'écriture du taux d'accroissement.

8. Cette question de synthèse est en général assez bien traitée. Un tracé propre est lisible permet aux candidats de gagner de nombreux points.

   Cependant, les axes ne comportent pas d'unité. De ce fait, il est impossible de voir que $F(0) = 1$. Enfin les allures des courbes sont souvent trop petites. Le tracé de la tangente est souvent faux ou semble être fait au hasard.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

Exercice 3

Partie I.

1. La définition d'une densité semble bien connue. Cependant, une trop grande précipitation est à noter dans cette question.
   En particulier, la continuité est très vite expédiée, plusieurs étudiants disent que la fonction est continue sauf en 0 ! Ou alors, elle est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   La convergence de l'intégrale n'est pas toujours évoquée voire presque toujours oubliée, de nombreux étudiants se contentent de calculer l'intégrale, où des erreurs dans le calcul de la primitive arrivent régulièrement.
2. (a) La définition de l'espérance, attendue dans cette question, est majoritairement donnée. La convergence absolue de l'intégrale impropre pour justifier l'existence de l'espérance doit être citée.
   Le lien avec l'intégrale de Riemann n'est pas bien rédigée ou n'est pas établie. Enfin, le calcul de l'espérance est souvent faux. trop souvent, l'espérance de X_i vaut $\dfrac{i}{i+1}$.

   (b) Cette question est peu traitée. Parmi ceux qui ont établi la formule de l'espérance à la question précédente, peu réussissent à montrer correctement que la suite $\left(\dfrac{i}{i-1}\right)_{i\geqslant 2}$ est décroissante. Beaucoup se contentent de l'observer par le calcul de quelques valeurs.
3. Cette question est en général bien traitée, mais on voit trop souvent des candidats qui dérivent F_i pour trouver F_i !Rappelons que le choix de la même lettre pour la borne d'intégration et pour la variable d'intégration est un choix très dangereux, les candidats se trouvent eux-mêmes perdus par un tel choix.
4. (a) Beaucoup ont correctement pensé à utiliser la fonction de répartition. Mais la question a souvent été mal traitée, par manque de rigueur par manque de justifications.
   - ⋆ Le support est rarement évoqué.
   - ⋆ Beaucoup oublient de traiter le cas $x < 0$ et manipulent l'inégalité sans se préoccuper du signe de x.
   - ⋆ La fonction de répartition de U n'a pas souvent été donnée.

   (b) Quand la question est traitée, la moitié des candidats le fait correctement. Pour l'autre moitié, les programmes sont donnés sans aucun `random` ou avec un test `if x <= 1` Certains programmes proposés ne répondent pas à la question posée, à savoir la simulation de X_i, mais donnent la fonction de répartition ou une densité de X_i

Partie II.

5. L'énoncé demandait explicitement d'utiliser la fonction `random()` du module `numpy.random`, il n'était donc pas question d'utiliser la fonction `binomial(n-1, p)` pour répondre à cette question.
6. Cette quetsion est très peu ou très mal traitée. Confusion entre les variables `n` et `N`, la commande sur la liste n'est jamais juste et très farfelue.
7. La librairie est bien gérée mais les candidats ont eu des problèmes avec les abscisses qui ont fait l'objet de propositions fantaisistes.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

8. (a) Les explications fournies sont en général très confuses et souvent mauvaises. Elles montrent que les étudiants n'ont pas compris le principe d'une clé primaire.
   (b) Cette question est inégalement réussi. Une bonne moitié des candidats ont bien compris cette question et la résolvent correctement.
   Beaucoup de candidats ne donnent pas une clé mais une phrase "le nom de la personne", "le département", ... Cependant, si l'attribut n'est pas cité, sa description exacte prouve que la question est quand même bien comprise.
   Plusieurs candidats proposent `i_nom` comme clé primaire de la table `individu` : n'ont-ils jamais remarqué que plusieurs personnes peuvent porter le même nom ?
   (c) Cette question est peu traitée.
   (d) Lorsqu'elle est traitée, elle est plutôt correcte, même si de temps en temps, la syntaxe est dans le désordre.
   (e) La jointure n'a pas souvent été vue. L'impression générale est que les jointures ne sont pas maîtrisées et qu'on écrit ce qu'on peut en anglais en espérant que ça passe...

Partie III.

9. Cette question quand elle est traitée est en général juste.
10. (a) Cette question est en général bien traitée quand elle est abordée. Rappelons qu'un événement conditionnel n'a pas de sens et que l'écriture suivante ne peut être utilisée: «$_{[Y=i]}[Z_n \leqslant x]$»
    (b) De nombreux candidats ont repéré cette question et y ont reconnu une utilisation de la formule des probabilités totales.
    La formule des probabilités totales et le système complet d'événements sont cités la plupart du temps, mais lors de la sommation, il apparait que le système complet d'événements n'est pas correct.
    (c) Cette question est plutôt réussie, la formule du binôme est en général, repérée.
11. Cette question est peu traitée, mais quand elle l'est, la résolution ets plutôt correcte.
    La continuité en 1 n'a pas souvent été faite, et certains pensent qu'il y a un problème en 0. Plusieurs candidats se sont lancés dans de longues vérifications inutiles (croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$).
12. Cette question est très peu abordée, mais bien traitée.
13. (a) Des tentatives de truandages.
    (b) Cette question n'est que très rarement abordée. L'idée de l'exponentielle est relativement fréquente mais le plus souvent sans aboutir par la suite.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.